

LA DERIVATION – APPLICATIONS

Etude de fonctions

I) MONOTONIE ET EXTREMUMS D'UNE FONCTION CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION (rappelles)

Propriété1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$

Propriété2 : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a , alors sa courbe représentative Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

Propriété3 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- 1) Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I .
- 2) Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I .
- 3) Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I .

Propriété4 : Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

Propriété5 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

Exemple1 : Soit $f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a : $f(x) = x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = (x\sqrt{x^2 - x})' = x'\sqrt{x^2 - x} + x \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + x \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2 - x} > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2 - 3x$

Le tableau de signe de : $4x^2 - 3x$ est :

x	$-\infty$	0	$3/4$	$+\infty$	
$4x^2 - 3x$	+	0	-	0	+

On a : $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]1; +\infty[$ et $\forall x \in]-\infty; 0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3; +\infty[$

et sur $]-\infty; 0[$

Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + x - 2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 + x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$\Delta = 9$ deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$10/3$	\searrow	$-7/6$	\nearrow	$+\infty$

Du tableau de variation de f en déduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $\frac{10}{3}$ en -2

Exercice : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme

donc dérivable sur \mathbb{R}

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$

f' s'annule en $\frac{1}{3}$ en changeant de signe à droite

et à gauche alors f admet un extremum en $\frac{1}{3}$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue

c'est $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{2}{3}$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc

dérivable sur \mathbb{R}

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en

$x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R} et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$\forall x \in D_h : h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$

$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$

Puisque: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \quad \frac{3}{(x-1)^2} > 0$ Le signe de $h'(x)$

est le signe de $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	+
$h(x)$	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\infty$	-1

h' s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative

c'est $-\frac{1}{4}$ en -1

Exercice : Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle :

$I_1 =]-\infty; 1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme

donc dérivable sur \mathbb{R}

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{7}{4}$	$\searrow -5$	$\nearrow +\infty$	

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et décroissante

sur $[-\frac{1}{2}; 1]$ en deduit que f Admet une valeur

maximal en $-\frac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\frac{7}{4}$ donc :

$$\forall x \in I_1 : f(x) \leq \frac{7}{4} \text{ donc que } f \text{ est majorée sur}$$

l'intervalle : $I_1 =]-\infty; 1]$ par $\frac{7}{4}$

- f est décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 1]$ et croissante

sur $[1; +\infty[$ en deduit que f Admet une valeur

minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$$\forall x \in I_2 : -5 \leq f(x) \text{ donc que } f \text{ est minorée sur}$$

l'intervalle : I_2 par -5

Exercice : Soit la fonction f définie sur $I = [0; \pi]$

par : $f(x) = \sin^2 x$ Étudier la concavité de la

courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et $k \in \mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$\cos 2x$	+	0	-	0	+

On a donc :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

(C_f) est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ et

$B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

II) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Propriété1 : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

La droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = f(x))$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x-x^2} \quad 1) \text{ Déterminer } D_f$$

2) montrer que la La droite $(\Delta): x = \frac{1}{2}$ est un axe

de symétrie de la courbe C_f

Solution :1) On a : $f(x) = \sqrt{x-x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0

donc : $D_f = [0,1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0,1]$ alors

$1-x \in D_f$?

$$x \in D_f = [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1$$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 1-x \in D_f$

b) montrons que : $f(1-x) = f(x)$???

$$f(1-x) = \sqrt{(1-x) - (1-x)^2} = \sqrt{1-x - (1-2x+x^2)}$$

$$= \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x)$$

Donc : La droite (Δ) : $x = \frac{1}{2}$ est un axe de

symétrie de la courbe C_f

2) Centre de symétrie.

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x . \text{ Montrer que le point } \Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$$

est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2 \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$

donc $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ est un centre de symétrie

de (C_f)

III) DEMI-TANGENTE VERTICALE

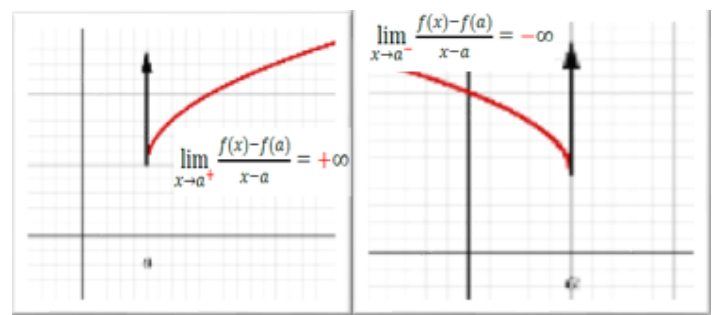
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r]$

Si f est continue à droite de a et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$$

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite de a .

Interprétation géométriques



Exemple : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -1$.

2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f = [-1, +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1) \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1) \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = -1$.

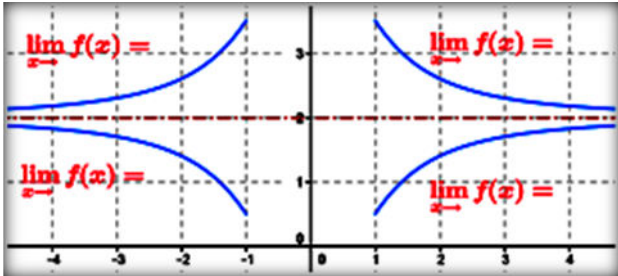
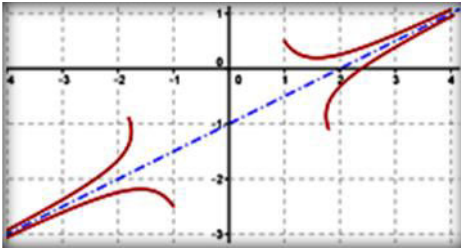
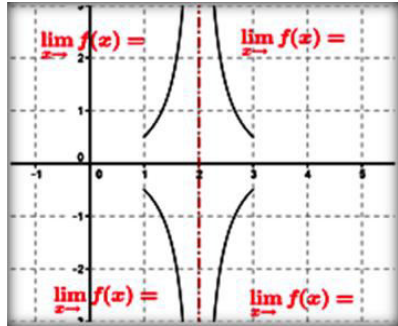
2) Interprétation géométrique :

La courbe C_f admet une demi-tangente verticale

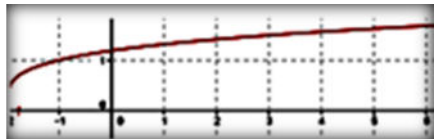
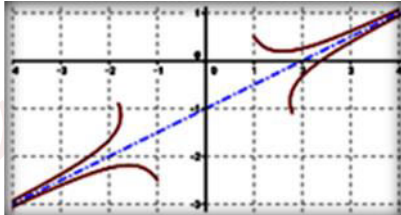

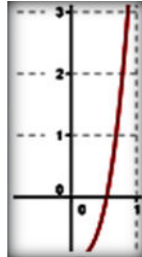
à droite du point $A(-1; f(-1))$ dirigée vers le haut

Car : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$ ($+\times+=+$)

IV) BRANCHES INFINIES.

<p>Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$</p>	<p>Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$</p>	<p>Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$</p>
 <p>La droite (Δ) d'équation $y = b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞</p>	<p>La droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$</p>  <p>(C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) > 0$ (C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) < 0$</p>	 <p>La droite (Δ) d'équation $x = a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a</p>

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

<p>Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$</p>	<p>Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$</p>		<p>Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$</p>
 <p>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$</p>  <p>La droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞.</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \infty$</p>  <p>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y = ax$</p>	 <p>La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)</p>

V) ETUDE DE FONCTIONS : 

Exemple1 :soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal
- 4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f
- 5) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses f
- 6) montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)
- 7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$

Car : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

La droite (Δ): $y = 2$ est une asymptote horizontal

a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

donc La droite (Δ'): $x = 0$ est une asymptote

a la courbe C_f

c) on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$

donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

donc La droite (Δ''): $x = 1$ est une asymptote a la courbe C_f

3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : ($\forall x \in D_f$)

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

si $x \in]0; 1[$ alors $f(x) - 2 > 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ): $y = 2$

si $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ alors $f(x) - 2 < 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f)

avec l'axe des abscisses : ($\forall x \in D_f$)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe

des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un

axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

a) si $x \in D_f$ alors $1-x \in D_f$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0;1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

$$\text{alors } 1-x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$$

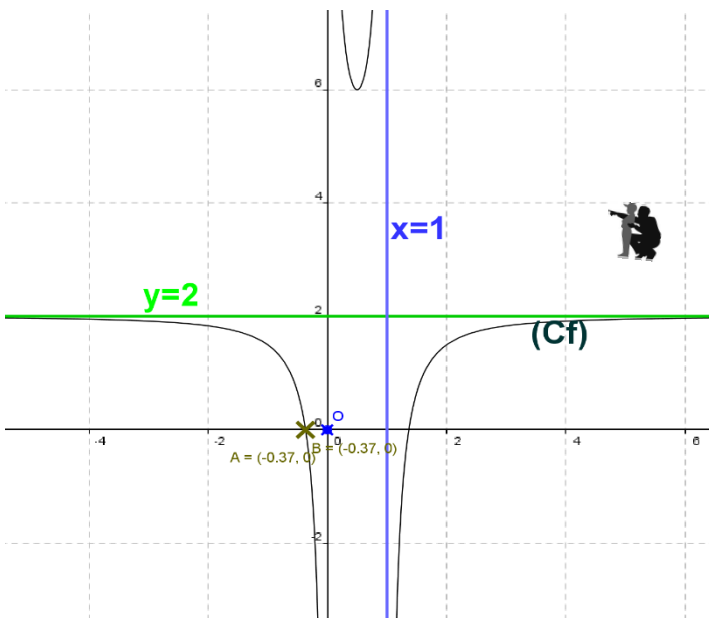
b) montrons que : $f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$?????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0;1\}$$

donc la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la

courbe C_f



Exemple2 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le

tableaux de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

2) on a : $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote

oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote

oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de f adroite de 2

et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2

et à gauche de -1

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente

verticale aux points $A(-1,0)$ et $B(2,0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de

variation de f ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Donc :

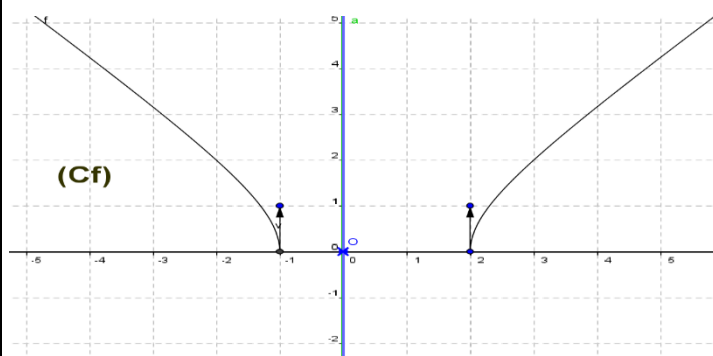
$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x - 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exemple3 : soit f une fonction définie sur \mathbb{R}

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}; \text{ si } \dots x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)\left(1 + \arctan \frac{1}{x}\right); \text{ si } \dots 1 > x \end{cases}$$

(C_f) La courbe de f dans un repère orthonormé

1)a)monter que f est continue en $x_0 = 1$

b) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner

une Interprétation géométrique du résultat :

2)a) calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

b) monter que la courbe de f admet une

asymptote oblique d'équation $(\Delta): y = x$ au

voisinage de $+\infty$

c)Étudier les branches infinies de (C_f) au

voisinage de $-\infty$

3)a)étudier les variations de f sur $I =]-\infty; 1[$

b) donner le tableau de variation de f' sur

$K = [1; +\infty[$ et en déduire les variations de f sur K

4) soit g la restriction de f sur $J =]-\infty; 0]$

a)Montrer que g est une bijection de J vers un

intervalle L que l'on déterminera

b) résoudre dans \mathbb{R}^+ l'équations suivante :

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \quad \text{et déterminer : } g^{-1}(-2) \quad \text{et} \quad (g^{-1})'(-2)$$

c)Représenter (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même

repère orthonormé.

Solution : on a $f(1) = 0$

$$1)a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)\left(1 + \arctan \frac{1}{x}\right) = 0 = f(1)$$

Donc f est continue à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = 0 = f(1)$$

Donc f est continue à gauche en $x_0 = 1$

Donc f est continue en $x_0 = 1$

• b) étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \arctan \frac{1}{x} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demie tangente à droite

de $A(1, 0)$. de coefficient directeur $f'_d(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$

d'équation: $y = f(1) + f'_d(1)(x-1)$ avec $x \geq 1$

$$y = 0 + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)(x-1) \Leftrightarrow (T_d): y = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)(x-1)$$

avec $x \geq 1$

• étude de la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 + 3 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}} = -\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demie tangente vertical a gauche de $A(1, 0)$

$$\begin{aligned} 2)a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 - 3x \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + x \left(1 - 3 \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(1 + \arctan \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \arctan \frac{1}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(1 + \arctan \frac{1}{x}\right) - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} - 1 - \arctan \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0 \text{ on calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = ??$$

$$\text{On pose : } t = \arctan \frac{1}{x} \text{ donc : } \tan t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\tan t}$$

$$x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\tan t} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$$

Donc : la courbe de f admet une asymptote

oblique d'équation $(\Delta): y = x$ au voisinage de $+\infty$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} - 3 \sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + 3\sqrt[3]{1-x} = +\infty$$

la courbe de f admet une branche parabolique

dans la direction de la droite $(\Delta): y = x$ au

voisinage de $-\infty$

3)a) étude des variations de f sur $I =]-\infty; 1[$

On a : $f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}$ si $x < 1$ est dérivable

sur $I =]-\infty; 1[$ (la somme de fonctions dérivables)

sur I

$$\forall x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) = 1 + 3 \times \frac{1}{3} (1-x)' (1-x)^{-\frac{2}{3}} = 1 - (1-x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(1-x)^2} - 1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

et puisque : $\sqrt[3]{(1-x)^2} > 0 \quad \forall x \in]-\infty; 1[$ le signe de

$$f'(x) \text{ est celui de : } \sqrt[3]{(1-x)^2} - 1$$

$$\sqrt[3]{(1-x)^2} \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow (1-x)^2 - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x(2-x) \geq 0$$

TV : de variations de f

b) on a f est dérivable sur

$K = [1; +\infty[$ (la somme de fonctions dérivables sur K)

x	$-\infty$	0	1
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	2	0

$$\forall x \in K = [1; +\infty[\quad f'(x) = 1 + \arctan \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$$

donc f' est dérivable sur K (la somme de fonctions dérivables sur K)

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \forall x \in K = [1; +\infty[$$

donc f' est décroissante sur K

et puisque f' est continue sur K alors :

$$f'(K) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f'; f'(1) \right] = \left] 1; 1 + \frac{\pi}{4} \right] \text{ donc } f'(x) > 0$$

$\forall x \in K = [1; +\infty[$ donc f est croissante sur K

Le tableau de variation de f' sur $K = [1; +\infty[$ est :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''(x)	+	0	-	0
f'(x)	$-\infty$	2	0	$+\infty$

4)a) on a : $g(x) = f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} \quad \forall x \in J$

D'après les questions précédentes on a g est continue et strictement croissante sur J alors

g est une bijection de J vers un l'intervalle

$$K = g(J) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g; g(0) \right] = \left] -\infty; 2 \right]$$

b) on a t=2 est une solution de l'équation :

$t^3 - 3t - 2 = 0$ la division euclidienne donne :

$$t^3 - 3t - 2 = (t-2)(t+1)^2$$

une solution de l'équation : $t^3 - 3t - 2 = 0$ dans \mathbb{R}^+

est $S = \{2\}$

on pose : $g^{-1}(-2) = x \Leftrightarrow -2 = g(x)$ et $x \in J$

donc : $x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} = -2$ et $x \in J$

on pose : $t = \sqrt[3]{1-x}$ donc : $t^3 - 3t - 2 = 0$ et $t \geq 1$

D'après les questions précédentes : $t = 2$

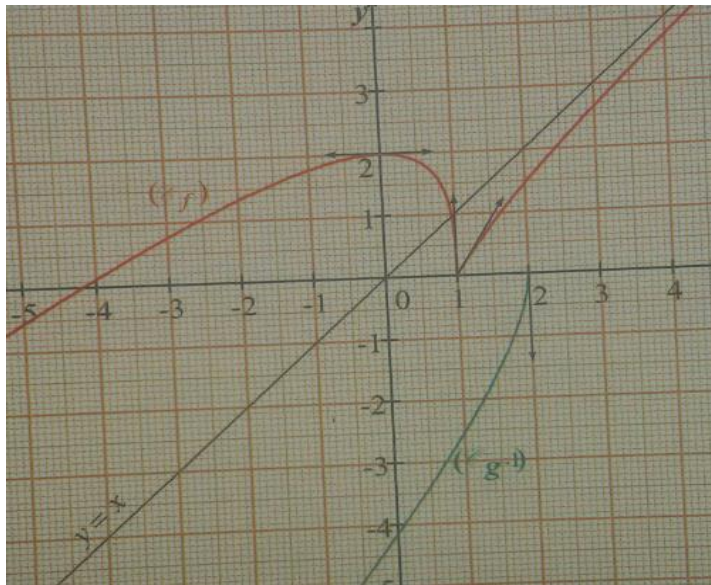
Donc : $x = 1 - t^3 = -7$ donc : $g^{-1}(-2) = -7$

Et puisque : $g'(-7) \neq 0$ alors on a :

$$(g^{-1})'(-2) = \frac{1}{g'(g^{-1}(-2))} = \frac{1}{g'(-7)}$$

Et puisque : $g'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

Alors : $g'(-7) = \frac{3}{4}$ donc : $(g^{-1})'(-2) = \frac{4}{3}$



Exemple4 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer que f est périodique de période $T = \pi$ et en déduire le domaine d'étude de f
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = \pi$

Remarque : la fonction : $x \rightarrow \cos(ax+b)$ est

périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$ si $a \neq 0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = \pi$
donc par exemple : $D_E = [0; \pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de

$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Le tableau de signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

est :

$2x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	2π	$\frac{9\pi}{4}$	
$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$	+	0	-	0	+

le tableau

de variation de f :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\sqrt{2}$	-2	2	$\sqrt{2}$	

4) du tableau de variation de f : on deduit que

Que f change de signe en sur les intervalles

$\left[0; \frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des

abscisses

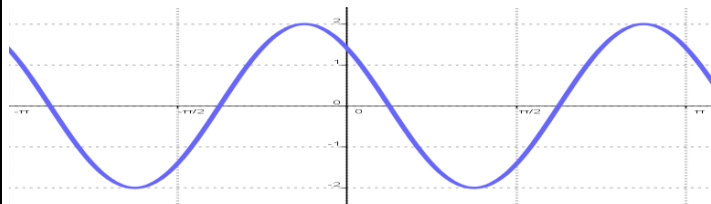
On va résoudre dans $I = \left[0; \frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation : $f(x) = 0$

On a : $\begin{cases} f(x)=0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E = [0; \pi]$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$



Exemple 5 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de f

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$ donc par exemple : $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de f ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x) \text{ Donc } f \text{ est impair}$$

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E = [0; \pi]$

3) f est dérivable sur $D_E = [0; \pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

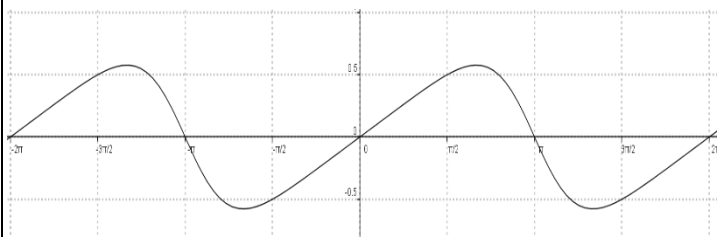
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2 \cos x + 1$

$$2 \cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \text{ Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2 \cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Exercice: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f
- 3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- 4) donner l'équation de la tangente (T) a la courbe de f en en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

b) $f(2\pi + x) = 4\sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$

$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0; 2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0; 2\pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a : $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$

$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On a : $1 - \sin x \geq 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ ou $1 - \sin x = 0$

$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ Donc :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	3	-5	1	

4) l'équation de la tangente (T) a la courbe de f

en en $x_0 = 0$ est : $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

Avec : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$ donc : $y = 4x + 1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$

$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1; 1]$ et l'équation

$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient : $X^2 - X - 1 = 0$

$\Delta = 9$ les solutions sont : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$

Donc : $f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

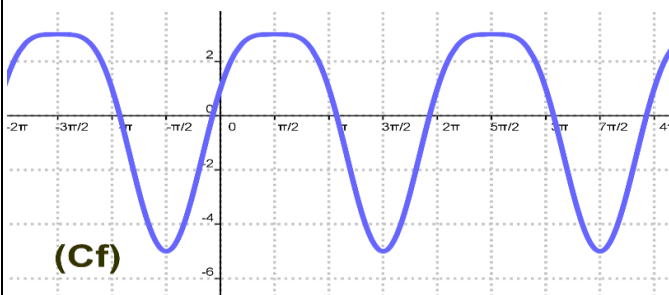
x	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

